

## Temat 6: Ruszty nieprzesztywnione - proporcje

### Typowe zadanie

Dane: schemat rusztu i obciążenie.

Szukane: wsporniki i pseudowsporniki (linie pogrubione) \* proporcje sił (obciążeń i/lub reakcji) zginających wsporniki i pseudowsporniki \* wykres momentów zginających z proporcjami wartości ekstremalnych \* konstrukcja stalowa dwuteowa o skokowo zmiennej wysokości proporcjonalnej do ekstremów momentów.

Rysunki: na kwadratowej siatce, rysowanej trójwymiarowo (w aksonometrii) jako siatka ukośna.

**Ruszt:** hierarchiczny, dwupoziomowy płaski układ prostych belek zginanych w kierunku poprzecznym do płaszczyzny układu. Skręcanie belek przez belki poprzeczne pomijamy przy analizie równowagi konstrukcji, zakładając że belki są wysokie i wąskie (np. stalowe), a więc sztywne przy zginaniu i podatne przy skręcaniu. Przyjmujemy, że ruszt leży w płaszczyźnie poziomej, a jego obciążenie jest pionowe, skierowane do dołu (grawitacyjne). Rozważamy ruszty nieprzesztywnione. Ruszt tworzą dwie prostopadłe rodziny belek, jedne belki są główne a pozostałe drugorzędne. Belki każdej rodziny są do siebie równoległe. Belki są skierowane wzdłuż linii kwadratowej siatki. Wszystkie belki są dwupodporowe (sztywne zamocowanie jest równoważne dwóm bliskim podporom przegubowym): wspornik, kładka (belka swobodnie podparta na dwóch podporach przegubowych położonych na końcach), kładka przedłużona wspornikiem jednostronnym lub dwustronnym (symetryczna dla prostoty). Belki główne są samonośne, tj. opierają się całkowicie na podporach rusztu, np. ścianach lub słupach, a nie na innych belkach. Belki drugorzędne opierają się całkowicie (w dwóch punktach), lub częściowo (w jednym punkcie), na belkach głównych. Są to zatem belki niesamodzielne ze względu na podparcie. Dla prostoty belki drugorzędne obciążamy następująco. Wspornik obciąża jedna siła skupiona na końcu, lub obciążenie równomierne na całej długości. Kładkę obciąża jedna siła w dowolnym położeniu (wymiernym, będącym stosunkiem liczb całkowitych), lub dwie równe siły zachowujące symetrię, lub obciążenie równomierne na całej długości. Wsporniki wystające z kładek obciążamy jak wsporniki, przy czym kładkę z dwoma wspornikami obciążamy (dla prostoty) symetrycznie. Zakładamy, że belki główne są one obciążone tylko skupionymi reakcjami występującymi w miejscach oparcia belek drugorzędnych (nazwijmy te miejsca węzłami); innych obciążeń, jak np. ciężar własny, na belkach głównych nie ma. Zezwala to na skupieniu uwagi na oddziaływaniu belek drugorzędnych na główne. Interesuje nas przy tym oddziaływanie wywołujące zginanie. Oddziaływanie takie ma miejsce tylko w nie popartych węzłach rusztu. W węzłach podpartych belki drugorzędne nie zginają belek głównych, gdyż obciążenie przekazywane jest bezpośrednio na podpory. Dla prostoty zakładamy, że węzły są tak położone, by belki główne były obciążone reakcjami belek tylko w wariantach wymienionych wyżej dla belek drugorzędnych obciążonych siłami skupionymi: na wsporniku obciążony jest jeden węzeł na końcu, na kładce jeden węzeł w dowolnym punkcie (wymiernym) lub dwa węzły symetryczne (w punktach wymiernych), z jednakowymi siłami. Przy powyższych, praktycznie często spełnionych założeniach, wykresy momentów sprowadzają się do zaledwie kilku typów. Te typy z kolei dadzą się sprowadzić, jeśli interesują nas proporcje momentów ekstremalnych, do jednego przypadku standardowego, odpowiadającego wspornikowi z siłą na końcu. Wykresy momentów zginających rysujemy po rozciągniętej stronie belki. Wykresy te są ciągłe na prostych, nie przerwanych dylatacjami odcinkach belki. Wykresy te są kwadratowe, wypukłe do dołu pod obciążeniem równomiernym i proste na odcinkach nie obciążonych, z kantami pod siłami skupionymi i na podporach. Standardem ze względu na wykres i ekstremum momentu zginającego jest wspornik z siłą na końcu (wspornik standardowy). Siła do dołu

rozciąga górę wspornika. Wykres momentów jest trójkątem leżącym u góry belki, ma zero na końcu swobodnym i maksimum w utwierdzeniu (trójkątny wykres standardowy). Wykres ten otrzymujemy wprost z definicji momentu względem punktu: moment równa się sile pomnożonej przez jej ramię względem punktu, mierzone prostopadle od punktu do linii działania siły. Na wsporniku siła jest stała, natomiast w miarę oddalania się od siły rośnie ramię, a więc wykres momentów jest co do kształtu wykresem ramienia siły względem kolejnych punktów wspornika. Siła to tylko pewien stały mnożnik, nie zmieniający kształtu wykresu, zmieniający (proporcjonalnie) tylko nachylenie wykresu i jego ekstremum. Stosunek momentów ekstremalnych na dwóch wspornikach standardowych jest równy stosunkowi sił obciążających wsporniki pomnożonemu przez stosunek długości tych wsporników. Prawo to nazwijmy Podstawowym Prawem Proporcji (PPP). Zastosowanie PPP jest sednem tego tematu. PPP prowadzi wprost do proporcji konstrukcji rusztu zginanego, stąd wynika praktyczne znaczenie PPP. By skorzystać z PPP musimy umieć dostrzec w ruszcie wsporniki standardowe i pseudowsporniki, ustalając ich długości (linie pogrubione na rysunku) i obciążenie. Pseudowsporniki to fragmenty części belki nie będącej wspornikiem standardowym, dla których ekstremum momentu można obliczyć jak dla wspornika standardowego. Pseudowsporniki identyfikujemy po pierwsze jako części belki z trójkątnym (jak na wsporniku) wykresem momentów. I tak, wykres momentów kładki obciążonej siłą skupioną składa się z dwóch trójkątów osiagających wspólne ekstremum pod siłą. Są tu zatem dwa pseudowsporniki: lewy, między lewą podporą i siłą oraz prawy, między prawą podporą i siłą. Obciążeniem lewego pseudowspornika jest lewa reakcja, a prawego prawa. Do obliczenia ekstremum momentu można wykorzystać dowolny z dwóch pseudowsporników. Analogiczny wykres momentów powstaje w przypadku wspornika obciążonego na końcu, wyrastającego z kładki. Część wspornikowa jest po prostu wspornikiem standardowym. Część kładkowa jest pseudowspornikiem obciążonym skrajną reakcją. Wykres momentów kładki obciążonej symetrycznie dwiema siłami skupionymi jest symetrycznym trapezem, którego część środkowa, pomiędzy siłami jest prostokątna, a części na obu końcach są trójkątne i one stanowią dwa symetryczne pseudowsporniki – lewy i prawy. Lewy pseudowspornik rozciąga się od lewej podpory do lewej siły i jest obciążony lewą reakcją. Prawy pseudowspornik rozciąga się od prawej podpory do prawej siły i jest obciążony prawą reakcją. Z powodu symetrii reakcje są sobie równe i równe siłom obciążenia. Ekstremum momentu można obliczyć na podstawie lewego lub prawego pseudowspornika. Analogiczny, trapezowy wykres momentów występuje w kładce symetrycznie przedłużonej dwoma wspornikami obciążonymi symetrycznie na obu końcach. Dwa wsporniki są tu oczywiście standardowe. W częściach belki obciążonych równomiernie wykres momentów jest paraboliczny, a więc niepodobny do trójkątnego wykresu standardowego. Jednak ekstremum momentu, istotne przy poszukiwaniu proporcji konstrukcji zginanych, zależy nie od szczegółów rozkładu obciążenia, ale od wypadkowej sił i reakcji na lewo (lub prawo) od punktu ekstremum pomnożonej przez ramię wypadkowej względem punktu ekstremum. Fakt ten umożliwia wprowadzenie pseudowsporników reprezentujących części belki obciążone równomiernie. I tak wspornik obciążony równomiernie na całej długości ma maksymalny moment w utwierdzeniu równy iloczynowi wypadkowej, położonej w połowie wspornika, przez jej ramię (połowa wspornika). Zatem wspornik obciążony ciągle jest równoważny, ze względu na moment ekstremalny (oraz reakcje podpory), dwukrotnie krótszemu pseudowspornikowi, obciążonemu wypadkową. Kładka obciążona równomiernie ma symetryczny wykres momentów, w którym można dostrzec dwa wykresy odpowiadające dwóm wspornikom. A więc połowa kładki (lewa lub prawa) obciążonej równomiernie jest równoważna wspornikowi obciążonemu równomiernie. Wspornik ten można z kolei zastąpić o połowę krótszym pseudowspornikiem obciążonym na końcu. Ostatecznie w obciążonej równomiernie kładce mamy dwa symetryczne pseudowsporniki, lewy i prawy, położone przy podporach, każdy o długości jednej czwartej kładki, obciążone (równymi sobie) reakcjami lewą i prawą. Zaznaczywszy w ruszcie (linie pogrubione) wsporniki i pseudowsporniki (w minimalnej liczbie

dającej wszystkie ekstrema) można odczytać proporcje ekstremów momentów wynikające z proporcji długości wsporników i pseudowsporników. Potrzebne są jeszcze proporcje sił (obciążeń i/lub reakcji) na wspornikach i pseudowspornikach. W naszych zadaniach na belki działają zwykle trzy równoległe siły, z których dwie to reakcje podpór (oznaczone strzałkami przerywanymi) a jedna to obciążenie (strzałka ciągła) lub wypadkowa obciążenia (strzałka przerywana w połowie obciążenia równomiernego). Siły skrajne są skierowane przeciwnie do siły środkowej dla zapewnienia równowagi translacyjnej i obrotowej. Stosunek dowolnych dwóch z trzech sił wynika wprost z zasady dźwigni, która odpowiada badaniu równowagi ze względu na obrót wokół punktu przyłożenia trzeciej siły. Stosunek ten jest odwrotny do stosunku odległości dwóch sił od trzeciej siły. Rysujemy tylko te siły i reakcje i ustalamy ich stosunki, które są niezbędne do ustalenia proporcji ekstremów momentów na minimalnej liczbie wsporników i pseudowsporników. Reakcje są dwóch rodzajów: między belką główną i podporą oraz między belką drugorzędną i belką główną w węźle. Reakcje jako siły wzajemnego oddziaływania występują parami, ale rysować będziemy tylko jeden element z każdej pary: reakcję podpory na belkę oraz, w węźle, reakcję belki drugorzędnej na belkę główną. Na podstawie proporcji ekstremów momentów sporządzamy trójwymiarowy, aksonometryczny rysunek konstrukcji rusztu. Sam wykres momentów sugeruje kształt konstrukcji lekkiej, ale pracochłonnej. My narysujemy konstrukcję cięższą, ale prostszą. Zakładamy, że belki są stalowe o przekroju dwuteowym i wysokości proporcjonalnej do momentu ekstremalnego. Na każdej belce w jednym przekroju rysujemy trójwymiarowy dwuteownik. By zmniejszyć całkowitą wysokość rusztu, przyjmujemy na rysunku, że belki drugorzędne i główne przenikają się. Jest to jedna z trzech możliwości: belki drugorzędne mogą stać na belkach głównych, powyżej nich, wisieć na nich, poniżej nich, lub przenikać się z nimi. Są to trzy różne konstrukcje, ale odpowiadają one temu samemu schematowi rusztu i temu samemu wykresowi momentów zginających.