

Temat 1: Krzywe belki statycznie wyznaczalne

Typowe zadanie

Dane: schemat belki i obciążenie. Szukane: podział konstrukcji na wsporniki i kładki elementarne (obwiedzione zamkniętymi liniami) z przyporządkowanymi im obciążeniami * poziome wykresy momentów dla wsporników i kładek elementarnych, z wartościami charakterystycznymi * całkowity wykres momentów na konstrukcji (z wartościami charakterystycznymi) * konstrukcja lekka, o zmiennej grubości * Rysunki: na pionowej siatce o rozstawie 1 .

Krzywe belki: Rozważamy belki zakrzywione w płaszczyźnie rysunku. Krzywizna może zmieniać się nagle (załamania) lub gładko. Obciążenie leży w płaszczyźnie rysunku. Rozważamy najprostsze, częste w praktyce obciążenia w postaci jednej siły skupionej lub obciążenia równomiernego. Obciążenia są grawitacyjne, skierowane do dołu. W belce prostej obciążonej poprzecznie występuje tylko zginanie i ścinanie, a więc momenty zginające i siły poprzeczne. Belka krzywa zmienia swój kierunek względem kierunku obciążenia i reakcji podpór, co powoduje jej zginanie, ścinanie i ściskanie lub rozciąganie. W cienkiej belce zginanie jest dominujące - ma decydujący wpływ na formę konstrukcji i wielkość jej przekroju - i tylko nim będziemy się zajmować. Rozważamy nieskomplikowane, nieprzesztywnione (statycznie wyznaczalne) krzywe belki: wsporniki i kładki oraz układy złożone ze wsporników i kładek. Wsporniki są zamocowane na jednym końcu, obciążone siłą skupioną na drugim końcu lub obciążeniem równomiernym zaczynającym się na końcu swobodnym. Kładki łączą dwie podpory przegubowe, położone na tej samej lub na różnych wysokościach, z których jedna jest przesuwana w poziomie (dla zapewnienia nieprzesztywnienia). Kładki są obciążone siłą skupioną w dowolnym miejscu lub obciążeniem równomiernym na całym odcinku między podporami. W rozważanych konstrukcjach, jako statycznie wyznaczalnych, łatwo znajduje się reakcje (z równań równowagi). Od obciążeń pionowych reakcje są tylko pionowe (plus moment w utwierdzeniu konstrukcji wspornikowych). Reakcje zależą od rozmieszczenia obciążenia i podpór oraz sposobu połączenia podpór (wspornik czy kładka), a nie od kształtu konstrukcji. Momenty zginające wyznaczamy łatwo z definicji: *moment = siła (wypadkowa) razy ramię*. Wszystkie siły (obciążenia i reakcje) są pionowe. Ramiona sił, z definicji prostopadłe do sił, są poziome. Jest to sytuacja identyczna – pionowe siły i poziome ramiona - do przypadku poziomych belek prostych obciążonych pionowo. Wykresy momentów - narysowane wzdłuż linii poziomej - są zatem kawałkami takie jak w poziomych, prostych belkach – wspornikach i kładkach . Zadanie polega zatem na (a) podziale konstrukcji na elementarne wsporniki i kładki; (b) ustaleniu obciążenia zginającego części elementarne – obciążeniem tym może być zadane obciążenie skupione lub ciągłe, wypadkowa obciążenia ciągłego, lub reakcja podpory; (c) sporządzeniu poziomych wykresów momentów dla elementarnych wsporników i kładek; (d) przeniesieniu tych częściowych, poziomych wykresów na krzywą konstrukcję w celu otrzymania całkowitego wykresu momentów. Wartości momentów zginających na konstrukcji odkłada się prostopadłe do linii konstrukcji. Wartości momentów odczytuje się z odpowiedniego cząstkowego wykresu poziomego i przenosi na konstrukcję wzdłuż prostych pionowych. Wykres momentów na konstrukcji rysujemy po stronie rozciąganej, linią przerywaną lub cienką, dla odróżnienia od linii konstrukcji. Na pojedynczej gałęzi konstrukcji (prostej, krzywej lub kanciastej) wykres jest ciągły, w rozwidleniach może być nieciągły. W miejscach zerowych wykres przechodzi na drugą stronę konstrukcji. W narożu konstrukcji tę samą wartość momentu należy nanieść wielokrotnie, w postaci wachlarza: najpierw prostopadłe do obu wychodzących z naroża kierunków, a potem łukiem łączącym otrzymane dwa punkty.

Bez łuku łączącego (a taki sposób rysowania występuje w literaturze) wykres momentów wydaje się wcięty w narożu, z zerową wartością momentu w narożu, co prowadzi do wciętej w narożu, błędnej konstrukcji. Charakterystyczne wartości momentu, które należy obliczyć i podać na wykresach to: miejsca zerowe, wartości ekstremalne, wartości na podporach i w narożach.

Przypadki szczególne krzywych belek:

(1) Wspornik nie zawinięty - linie pionowe przecinają go jednokrotnie. Wspornik jest w całości elementarny. Jego poziomy wykres momentów jest identyczny jak w prostym wsporniku poziomym, obciążonym tak jak wspornik krzywy.

(2) Wspornik zawinięty - niektóre linie pionowe przecinają go dwukrotnie, tj. konstrukcja ma dwie fałdy, jedna nad drugą. Obciążenie, dla uproszczenia, znajduje się tylko na jednej fałdzie - tej położonej na swobodnym końcu. Jeżeli obciążeniem jest siła skupiona na końcu, cały wspornik jest elementarny, wykres poziomy jest jeden dla całej belki. Jest nim linia prosta z zerem pod siłą skupioną. Jeżeli obciążenie jest ciągłe, na fałdzie końcowej, to konstrukcję dzielimy na dwa wsporniki elementarne, a wykres poziomy składa się z dwóch części. Pierwsza część znajduje się pod obciążeniem ciągłym. Wykres poziomy jest tam taki, jak na prostym wsporniku obciążonym ciągle. Druga część obejmuje resztę belki. Wykres poziomy pochodzi tam od wypadkowej obciążenia ciągłego, a więc jest to linia prosta z zerem pod wypadkową. W miejscu połączenia oba wykresy mają tę samą wartość i to samo nachylenie względem linii poziomej. Na prostych, pionowych częściach wspornika zawiniętego wykres jest stały, gdyż zginająca go wypadkowa obciążenia (pionowa) ma stałe ramię względem takich części.

(3) Wspornik rozwidlony (drzewo) - ma dwie wspornikowe (nie zawinięte dla prostoty), obciążone gałęzie, wyrastające z nie obciążonego zewnątrz pnia, zawiniętego lub nie, sztywno zamocowanego w fundamencie. Te trzy części są wspornikami. Poziome wykresy momentów każdej gałęzi pochodzą od obciążeń tych gałęzi. Wykresy te są od siebie niezależne. Pień dźwiga obie gałęzie, więc jego poziomy wykres momentów sporządzamy od wypadkowej obciążenia obu gałęzi. W przypadku obciążenia symetrycznego wypadkowa leży w jego połowie. W przypadku braku symetrii szukamy wypadkowej dwóch sił równoległych. Wypadkowa dwóch równoległych, skierowanych do dołu sił jest równa ich sumie, leży w pobliżu siły większej, a stosunek długości odcinka pomiędzy wypadkową i siłą mniejszą do długości odcinka pomiędzy wypadkową i siłą większą równa się stosunkowi siły większej do mniejszej (zasada równowagi dźwigni). W miejscu spotkania się gałęzi z pniem momenty na gałęziach są niezależne od siebie - nie muszą być równe. Zeru musi być równa, by zapewnić równowagę węzła, suma trzech momentów: na dwóch gałęziach i na pniu. Warunek ten można wykorzystać jako sprawdzian poprawności trzech niezależnie obliczonych momentów w rozwidleniu. Konstrukcja w węźle łączącym gałęzie i pień ma formę prostokąta o wysokości równej większemu z dwóch momentów na gałęziach i szerokości równej momentowi w pniu. Ponieważ moment w pniu jest równy różnicy momentów gałęzi, szerokość prostokąta jest mniejsza od wysokości.

(4) Wspornik wystający z kładki - część wspornikowa może być jedna (lewa lub prawa) lub dwie, zawinięte lub nie, obciążone są tylko części wspornikowe, kładka nie. Wykresy momentów na wspornikach omówiono powyżej, w punktach (1) i (2). Poziomy wykres między podporami kładki jest prostą łączącą wykresy wsporników. Kładka może być zawinięta lub nie.

(6) Kładka obciążona siłą skupioną - wymaga obliczenia najpierw reakcji podpór, korzystając z zasady równowagi dźwigni. Jeśli obciążenie leży między podporami, to obie reakcje są skierowane do góry, a ich suma równa się obciążeniu. Jeżeli obciążenie leży poza podporami, reakcja bliższa obciążeniu jest skierowana do góry, druga reakcja jest skierowana do dołu. Po odrzuceniu podpór i zastąpieniu ich reakcjami, kładka ma dwie wspornikowe części, zawinięte lub nie, obciążone reakcjami, zamocowane pod siłą skupioną, na których wykresy momentów robimy jak w przypadkach (1) i (2). W miejscu spotkania obu wsporników (pod siłą skupioną) wykres momentów nie ma skoku.

(7) Kładka obciążona ciągle między podporami nie zawinięta nad podporą – ma wykres momentów prostej kładki poziomej (symetryczny, kwadratowy, z zerami na podporach, rozciągający dół belki). Moment maksymalny jest równy $(1/8)(\text{obciążenie})(\text{kwadrat długości})$. Obliczanie reakcji jest zbędne.

(8) Kładka obciążona ciągle między podporami zawinięta nad podporą – składa się z dwóch części. Pierwsza to kładka taka jak w punkcie (7). Druga to wspornik znajdujący się między podporą, nad którą belka się zawija, a początkiem obciążenia ciągłego. Oba końce tego wspornika leżą na jednej linii pionowej. Obciążeniem wspornika jest pionowa reakcja podpory (równa połowie wypadkowej obciążenia ciągłego). Na obu końcach wspornika moment jest więc zerowy. Jeśli kładka zawija się nad obiema podporami, mamy dwa takie wsporniki.

Konstrukcja lekka ma grubość proporcjonalną do wartości momentu. W miejscach zerowego momentu grubość konstrukcji jest mała, ale różna od zera. Zapewnia to geometryczną niezmienną konstrukcji. Ponadto miejsca zerowych momentów pracują zwykle na siły poprzeczne i/lub podłużne. Należy pamiętać by konstrukcja nie była rysowana jako wcięta, czy przewężona w sztywnych narożach, gdzie wykres momentów ma postać wachlarza identycznych wartości.