

## Temat 5: Belki statycznie wyznaczalne z obciążeniem ruchomym

### Typowe zadanie

Dane: belka wielopodporowa nieprzesztywniona \* miejsca i typy deformacji wirtualnych \* typy obciążenia

Szukane: przemieszczenia belki odpowiadające danej deformacji wirtualnej \* położenia obciążeń skupionych i ciągłych maksymalizujących dane deformacje wirtualne oraz odpowiadające tym deformacjom reakcje i siły wewnętrzne: momenty zginające  $M$ , siły poprzeczne  $T$ , reakcje podpór  $R$ .

**Belka wielopodporowa nieprzesztywniona**: składa się z poziomego prostego łańcucha prostych prętów, połączonych ze sobą końcami przegubowo i opartych na podporach przegubowych i/lub sztynych (utwierdzonych). Pręt to ciało długie i cienkie (oznaczenie: linia ciągła). Podpora przegubowa może być nieprzesuwna (oznaczenie: trójkąt) lub przesuwna (oznaczenie: trójkąt podkreślony w kierunku przesuwu). Obie podpory przegubowe przytrzymują belkę w jednym punkcie, umożliwiając obrót belki względem podpory. Podpora przesuwna umożliwia też przesuw belki względem podpory. Podpora ta uniemożliwia przemieszczenie prostopadłe do przesuwu, a więc odbiera belce jeden stopień swobody. Podpora nieprzesuwna wyklucza wszelkie przesunięcia, a więc odbiera dwa stopnie swobody. Podpora sztywna (oznaczenie: linia prostopadła do belki plus kreskowanie ukośne do tej linii) odbiera belce wszystkie ruchy, a więc trzy stopnie swobody (dwa przesunięcia i obrót). Dwie blisko siebie położone podpory przegubowe można zastąpić jedną podporą sztywną. Belka nieprzesztywniona (zwyczajowo nazywana statycznie wyznaczalną) ma minimalną liczbę podpór, wystarczającą do jej unieruchomienia. Dla jednego pręta, który ma w płaszczyźnie trzy stopnie swobody, potrzebne są dwie podpory przegubowe - przesuwna i nieprzesuwna. Dla prostego łańcucha z dwóch prętów - trzy podpory przegubowe, w tym jedna nieprzesuwna. Dla łańcucha z trzech prętów - cztery podpory przegubowe, w tym jedna nieprzesuwna. Dla łańcucha z "n" prętów potrzeba i wystarcza "n+1" podpór przegubowych, w tym jedna nieprzesuwna. Standardowe, najprostsze, nieprzesztywnione belki wielopodporowe mają podparte przegubowo oba końce i wszystkie przeguby łączące pręty. Wszystkie inne belki, o tej samej liczbie podpór co dana belka standardowa, można otrzymać przemieszczając lub nie, w dowolnych kombinacjach, podpory belki standardowej. Podporę skrajną lewą można zostawić lub przesunąć w prawo. Podporę skrajną prawą można zostawić lub przesunąć w lewo. Każdą podporę wewnętrzną (stojącą w belce standardowej pod przegubem) można zostawić, przesunąć w lewo, lub przesunąć w prawo. Podpory można przesuwać nie za daleko, tylko do najbliższego odcinka belki. Metodą przesuwania można otrzymać  $4 \cdot 3^{n-2}$  różnych belek na "n" podporach przegubowych. W belkach tych pojawiają się trzy typy części: pręty oparte na dwóch podporach, a więc nieruchome (stojaki), pręty oparte na jednej podporze, a więc mogące się wokół tej podpory obracać (huštawki) oraz pręty bez podpór, które są całkowicie ruchome (łączniki). Każdy stojak jest samowystarczalny - nieruchomy. Każda huštawka musi się trzymać (ale tylko jednym końcem) - wprost, lub za pośrednictwem łańcucha huštawek - dokładnie jednego stojaka. Każdy łącznik musi się opierać na obu końcach - wprost, lub za pośrednictwem łańcucha huštawek - na stojakach. Każde dwa stojaki muszą być rozdzielone dokładnie jednym łącznikiem - wprost, lub za pośrednictwem łańcuchów huštawek. Wymienione belki mają tylko podpory przegubowe. Dodatkowe belki otrzymamy zastępując stojaki, których dwie podpory przegubowe są blisko siebie, podporami sztywnymi. Zastąpić możemy dowolnie wybraną liczbę takich stojaków.

**Deformacje wirtualne**: są to zmiany kształtu belki wywołane sztucznie (stąd wirtualne) przez

jej (1) przesunięcie względem podpory (2) złamanie bądź (3) przesunięcie ścinające. Dla prostoty deformacje wykonujemy pojedynczo, to jest "uszkadzamy" belkę w jednym miejscu i uwalniamy tylko jeden stopień swobody. W przypadku przesunięcia względem podpory ów stopień swobody to przemieszczenie pionowe belki w górę lub w dół (podpora zostaje nieruchoma). W przypadku złamania, w miejscu złamania wstawiamy dodatkowy (wirtualny) przegub (oznaczenie: duża kropka) i tak przemieszczamy belkę, by w dodanym przegubie powstał kant (załamanie) skierowany do dołu lub do góry. Interesujące praktycznie miejsca złamania belki są nad podporami (jeśli nie ma tam przegubu) oraz pomiędzy przegubem (lub podporą) i sąsiednim przegubem (lub podporą). W przypadku przesunięcia ścinającego przesuwamy część belki na lewo od przecięcia w stosunku do części na prawo od przecięcia (mamy tu do wyboru dwa kierunki ruchu) tak, by części te pozostały do siebie równoległe. Jeśli któraś z części się obraca, to druga też musi się obrócić by zachować równoległość. Zasada ta nie dotyczy przecinania w przegubie: tu przemieszcza się tylko jedna z powstałych dwóch części (druga nie może się poruszyć), a części na lewo i na prawo od przecięcia nie są równoległe. Interesujące praktycznie miejsca przecięcia to środki pręseł, przeguby oraz punkty nieco na lewo i nieco na prawo od podpór. We wszystkich rozpatrywanych deformacjach wirtualnych ruchy wszystkich punktów (na całej długości belki) są tylko pionowe; całe proste pręty (nie połamane przegubami lub nie przecięte przez nas - wirtualnie) pozostają proste i całe - nie łamią się; podpory pozostają na swoich miejscach krępując mniej lub więcej ruchy prętów (tj. stojaki pozostają nieruchome, ruszają się tylko huśtawki i łączniki). Każdy rodzaj deformacji wirtualnej ma dwa warianty: ruch w jedną stronę lub w stronę przeciwną. Jeden wariant jest odbiciem zwierciadlanym drugiego. Z dokładnością do odbicia zwierciadlanego deformacje wirtualne są jednoznaczne (gdyż uwalniamy po jednym stopniu swobody).

**Obciążenia:** reprezentują to wszystko (siły zewnętrzne), co wywołuje deformacje (zmiany formy) konstrukcji. Rozpatrzmy tylko najczęściej w praktyce spotykane typy obciążeń. Dla belki poziomej są to obciążenia skierowane pionowo, poprzecznie do belki i zwrócone do dołu - wywołane grawitacją. Obciążenia takie mogą być: skupione (oznaczenie: strzałka skierowana do dołu) lub rozłożone równomiernie (oznaczenie: wąski poziomy prostokąt wypełniony małymi strzałkami skierowanymi do dołu). Obciążenie skupione reprezentuje ciężary o małych wymiarach wobec wymiarów belki (np. człowiek na kładce lub samochód na moście). Obciążenie rozłożone równomiernie działa na całej długości belki lub jej długim fragmencie (np. ciężar własny belki, ciężar warstwy śniegu).

**Reakcje i siły wewnętrzne:** są to siły powstające w konstrukcji w reakcji na działanie obciążeń (sił zewnętrznych). Siły zewnętrzne próbują konstrukcję zdeformować, a po osiągnięciu wielkości krytycznej zniszczyć. Siły reakcji się temu przeciwstawiają. Jest tyle typów reakcji ile typów deformacji. Przesunięciu belki względem podpory przeciwdziałają dwie siły - reakcje podporowe  $R$  (w literaturze nazywane krótko choć myląc po prostu reakcją) - przyłożone odpowiednio do belki i do podpory (oznaczenie: dwie strzałki skierowane do siebie, a przeciwnie do kierunku przemieszczenia). Łamaniu belki, które polega na obrocie części belki na lewo od złamania względem części na prawo, przeciwdziałają dwa momenty zginające  $M$  (oznaczenie: dwie strzałki zakrzywione, skierowane przeciwnie do wzajemnego obrotu, tj. obrotu części lewej względem prawej). Przesunięciu ścinającemu belki przeciwdziałają dwie siły ścinające  $T$  (inaczej, siły poprzeczne; oznaczenie: dwie strzałki poprzeczne po obu stronach przecięcia, skierowane do siebie, przeciwnie do przemieszczeń). Reakcje występują zawsze parami wielkości równych i przeciwnie skierowanych. Jeden element pary działa na jedną część konstrukcji, drugi na drugą. Momenty zginające i siły ścinające nazywane są zazwyczaj nie reakcjami (choć nimi są), ale siłami wewnętrznymi.

**Obciążenia maksymalizujące deformacje wirtualne i reakcje:** są to obciążenia tak położone,

by dana deformacja wirtualna, w danym miejscu, wystąpiła najłatwiej, stała się największa (a tym samym odpowiednia reakcja, czy siła wewnętrzna, była maksymalna). Innymi słowy, są to obciążenia krytyczne, najbardziej niekorzystne, najłatwiej niszczące. Krytyczne położenia obciążeń widoczne są na zdeformowanej konstrukcji (zwanej z tego powodu linią wpływową: reakcji, momentu zginającego lub siły ścinającej). Po pierwsze, obciążenie krytyczne musi być skierowane zgodnie z kierunkiem przemieszczenia zdeformowanej konstrukcji. Jeżeli w żadnym punkcie takiej zgodności nie ma, to obciążenia krytycznego nie ma, a maksymalna wielkość odpowiadającej danej deformacji reakcji wynosi zero. Skupioną siłę krytyczną (u nas zawsze skierowaną w dół - grawitacja) ustawiamy w miejscu największego przemieszczenia w dół; gdy podejrzanych miejsc jest kilka, stawiamy siłę w każdym z nich, opatrzoną znakiem zapytania. Krytyczne obciążenie rozłożone (u nas zawsze skierowane w dół) rozciąga się na wszystkie odcinki belki przemieszczone w dół.