

## **Temat 1: Konstruowanie i podpieranie płaskich układów statycznie wyznaczalnych**

### **Zadanie:**

#### ***Część I: zeszywnianie***

Zeszywnić (całkowicie lub częściowo, zgodnie z poleceniem zadania) układ płaski metodą triangularyzacji, minimalną liczbą więzów zeszywniających. Ponumerować wprowadzane więzy zeszywniające w kolejności ich dodawania. Podać liczbę dodanych więzów zeszywniających (z).

#### ***Część II: podpieranie***

Odebrać wszystkie stopnie swobody układu, otrzymanego w części I, podpierając go wskazaną metodą, tak aby stał się sztywny (geometrycznie i chwilowo geometrycznie niezmienny) ale nie przeszywniony (pozostał zewnątrznie statycznie wyznaczalny). Ponumerować wprowadzane więzy podpierające w kolejności ich umieszczania. Pokazać linie konstrukcyjne dowodzące prawidłowości rozmieszczenia więzów. Podać liczbę dodanych więzów podpierających (p). Podać całkowitą liczbę stopni swobody układu wyjściowego (czyli sumę liczb dodanych więzów zeszywniających i podpierających  $css=z+p$ ).

### **Układ płaski:**

Zestaw sztywnych, płaskich elementów połączonych przegubami, leżących i (ewentualnie) poruszających się w płaszczyźnie. Układ płaski może być jako całość sztywny lub niesztywny (deformacyjny), w zależności od mapy połączeń jego elementów.

### **Element sztywny:**

Ma stały, niezmienny kształt. Można go przesuwac i obracać tylko jako całość; są to ruchy w płaszczyźnie układu płaskiego. Przykłady: pręt – oznaczony linią ciągłą (prosty, krzywy, rozgałęziony, otwarty, zamknięty -pierścień), obszar – oznaczony polem zakreskowanym (kwadrat, koło, elipsa, nieregularny, wypukły, wklęsły, bez dziur, dziurawy).

**Przegub:** łącznik (oznaczany małym okręgiem) między dwoma elementami. Przegub nie pozwala elementom odsunąć się od siebie, ale zezwala na ich wzajemny obrót, w dowolną stronę w płaszczyźnie, w której leżą elementy. Na przykład palec ręki ma dwa przeguby i jest połączony trzecim przegubem z dłonią. Przegubem jest zawias w drzwiach. Klamka jest połączona z drzwiami przegubowo. Przegub nazywamy wielokrotnym, gdy łączy więcej niż dwa elementy. Dowolne dwa elementy są wtedy ze sobą połączone przegubowo, to jest mogą się względem siebie obracać.

### **Układ sztywny:**

Elementy sztywne połączone ze sobą sztywno (bez przegubów) są sztywne. Przykłady: pręty połączone z prętami, obszary połączone z obszarami, pręty połączone z obszarami. Niektóre układy elementów sztywnych połączonych przegubowo też stanowią sztywną całość (układ sztywny) i te będą nas interesować jako konstrukcje budowlane. Przykład podstawowy to trójkąt: trzy przeguby nie leżące na jednej prostej, połączone w zamknięty obwód trzema sztywnymi elementami. Położenie, wielkość i kształt trójkąta przegubów oraz kształt elementów między przegubami nie są istotne, można je zmieniać, a układ pozostanie sztywny. Prosta ogólna metoda (nie jedyna) budowy sztywnych układów z połączonych przegubowo elementów polega na tworzeniu kolejnych trójkątów. W każdym kroku stworzona w poprzednim kroku konstrukcja stanowi jeden bok tworzonego trójkąta. Ostateczna konstrukcja składa się z samych trójkątów (krata trójkątna). Usunięcie przegubu z układu sztywnego daje układ sztywny. Jeśli z trójkąta usuniemy jeden, dwa lub trzy przeguby, to w każdym przypadku będzie on sztywny.

### ***Część I: zeszywnianie***

### **Układ deformacyjny (niesztynny), więzy i deformacyjne stopnie swobody (dss):**

Układ połamany przegubami, w którym niektóre elementy można przemieścić względem innych tak, by kształt (forma) układu zmieniła się (zdeformowała). Przykład: nożyce (dwa sztywne elementy połączone przegubem) nie mają stałej formy, nie są sztywne - można je rozwierać i zwierać. Liczba deformacyjnych stopni swobody układu określa na ile sposobów można układ zdeformować. Przykład: nożyce mają jeden deformacyjny stopień swobody (zmiana kąta między ostrzami). Aby ustalić ile dany układ ma deformacyjnych stopni swobody przeguby układu łączymy dodatkowymi sztywnymi elementami - więzami (oznaczenie - linia przerywana), dopóki nie otrzymamy sztywnego układu. Więz dodajemy tak, by stał się on jednym z trzech ogniw trójkąta. Tak dodany więz odbiera układowi jeden deformacyjny stopień swobody, a stworzony trójkąt jest sztywny. Jeśli układ z dodanym więzem nie jest jeszcze całkowicie sztywny, dodajemy następny więz. W momencie otrzymania sztywnej kraty trójkątnej kończymy dodawanie więzów. Ich liczba jest liczbą deformacyjnych stopni swobody wyjściowego układu. Taka metoda liczenia deformacyjnych stopni swobody polega na postępującej triangularyzacji (tworzeniu trójkątów) aż do otrzymania ciała sztywnego, dla którego  $dss=0$  i liczeniu dodanych więzów zesztynniających. Układy deformacyjne będą zesztynniane całkowicie do ciała sztywnego, czyli do usunięcia wszystkich deformacyjnych stopni swobody (*część I zadania*) i następnie podpierane (*część II zadania*) albo zesztynniane częściowo do układu deformacyjnego o mniejszej liczbie deformacyjnych stopni swobody niż układ wyjściowy (*część I zadania*) i następnie podpierane (*część II zadania*).

### **Rodzaje układów deformacyjnych i liczba ich stopni swobody (dss):**

Drzewa jednogłęziowe (następny element przyczepiony przegubem do poprzedniego) lub wielogłęziowe (z

elementu poprzedniego może wychodzić więcej niż jeden elementów następnych, połączonych z poprzednim przegubowo).

Dwa elementy połączone przegubem mają 1 dss (obrót jednego elementu względem drugiego). Aby uzyskać

ciało sztywne ten jeden dss odbieramy za pomocą jednego więzu (na którego końcach dodajemy przeguby)

tworząc trójkąt.

Trzy elementy (trzeci przyczepiony do drzewa dwuelementowego) mają 2 dss i potrzebne są dwa więzy aby

całkowicie zesztynnić układ. Pierwszy więz tworzy trójkąt z dowolnych dwóch sąsiednich elementów drzewa i

przekształca trójelementowe drzewo w drzewo o dwóch elementach. Drugi więz triangularyzuje to drzewo.

Cztery elementy (czwarty przyczepiony do drzewa trójelementowego) mają 3 dss.

*Drzewo o (n) elementach ma (n-1) dss*

Pierścienie (drzewa jednogłęziowe zamknięte - ostatni element łączy się z pierwszym).

Trójkąt (pierścień trzech elementów sztywnych połączonych trzema przegubami tworzącymi formę trójkąta) jest

sztywny - ma 0 dss. Jeśli trzy przeguby leżą na jednej prostej, to układ jest niesztynny (tzw. chwilowo

geometrycznie zmienny, nie nadający się na konstrukcję budowlaną).

Czworokąt (pierścień czterech elementów połączonych czterema przegubami) ma 1 dss (np. kwadrat deformuje

się do postaci rombu). Dodanie jednego więzu (np. po przekątnej kwadratu) przekształca czworokąt w sztywną

kratę złożoną z dwóch trójkątów.

Pięciokąt ma 2 dss. Jeden więz przekształca go w czworokąt, a następny więz w trójkątną kratę.

*(n)-kąt ma (n-3) deformacyjne stopnie swobody*

### **Uwagi ogólne odnośnie zeszywniania i liczby deformacyjnych stopni swobody:**

Liczba deformacyjnych stopni swobody danego układu jest określona jednoznacznie. Minimalna liczba więzów wystarczająca do całkowitego zeszywniania układu (do układu o  $dss=0$ ) jest równa liczbie deformacyjnych stopni swobody, a zatem też jest określona jednoznacznie. Rozmieszczenie więzów jest niejednoznaczne: dany układ można zeszywniać więzami na mnóstwo sposobów, można też więzy rozmieszczać w różnej kolejności. Minimalna liczba więzów potrzebna i wystarczająca do całkowitego zeszywniania jest jednak ustalona i równa  $dss$ . Mniej więzów niż wynosi liczba deformacyjnych stopni swobody nie zezwoli nigdy na całkowite zeszywnianie układu. Z drugiej strony więzy o liczbie równej  $dss$  (a także większej) mogą być umieszczone wadliwie: w części układu może być ich za dużo (konstrukcja przeszywniona), a w innej części za mało (układ nieszywny). Ważna jest liczba i rozkład więzów. Ważna jest konfiguracja przegubów i fakt ich połączenia lub nie. Kształt elementów łączących nie ma znaczenia. Pojęcia drzewa i pierścienia (trójkąta, czworokąta, itd.) odnosi się do rozmieszczenia i sposobu połączenia przegubów, a nie do kształtu łączników. Dla ułatwienia analizy liczby deformacyjnych stopni można, zostawiając przeguby tam gdzie były, zastąpić wszystkie łączniki prostymi odcinkami. Otrzymany układ prostych elementów ma tyle samo deformacyjnych stopni swobody co układ wyjściowy, z elementami o skomplikowanych kształtach.

### **Część II: podpieranie**

**Całkowita liczba stopni swobody (css) =** liczba deformacyjnych stopni swobody ( $dss$ ) + 3 (liczba sztywnych ruchów sztywnego ciała na płaszczyźnie - 2 przesunięcia i 1 obrót). Czyli  $css = dss + 3$ .

**Podpieranie:** łączenie układu z jego otoczeniem, za pomocą więzów podpierających. Są one podobne do więzów zeszywniających - mają przeguby na obu końcach, przy czym jeden koniec przyczepiony jest do układu a drugi do otoczenia (otoczeniem jest to czego konstrukcja się trzyma, na czym stoi lub wisi). Liczbę więzów podpierających oznaczymy przez ( $p$ ). W konstrukcji geometrycznie niezmiennej (nieruchomej), ale nie przeszywnionej zewnątrz (statycznie wyznaczalnej zewnątrz, podpartej na minimalnej liczbie podpór) jest tyle więzów podporowych, ile wynosi całkowita liczba stopni swobody układu otrzymanego po zeszywnianiu:  $p = css$  układu po zeszywnianiu = ( $dss$  układu po zeszywnianiu) + 3.

Przy mniejszej liczbie podpór układ jest geometrycznie zmienny, ruchomy. Przy większej liczbie podpór układ jest zewnątrz (tj. co do podparcia) przeszywniony, czyli statycznie niewyznaczalny. Zaletą układów podpartych bez przeszywniania jest dopasowywanie się bez oporu i zniszczenia konstrukcji do niejednakowo przemieszczających się podpór (osiadanie gruntu, trzęsienia ziemi, szkody górnicze). Rozważymy szczegółowo różne sposoby nieprzeszywnionego podparcia pojedynczej bryły, drzewa o 2 ogniwach (bryłach) i pierścienia o 4 ogniwach (układy o  $css=3$  i  $css=4$ ); nazwijmy te układy podstawowymi. W układach o większej liczbie stopni swobody możliwe jest wyszukanie podukładu podstawowego, podparcie go metodą znaną dla układu podstawowego, i odebranie pozostałych jeszcze stopni swobody (obrotów) pojedynczymi więzami podporowymi, poczynając od elementów najbliższych podukładowi podstawowemu.

**Metody podparcia trzech stopni swobody - podparcie sztywnej bryły** (bryła ma 3 sztywne ruchy do odebrania). Ruchy te odbieramy trzema więzami podpierającymi ( $p=3$ ). Kierunki więzów nie mogą być do siebie równoległe (układ by się przesunął prostopadle do tych kierunków). Nie mogą się też przecinać w jednym punkcie (układ by się obracał wokół tego punktu). Kierunkiem więzu jest kierunek prostej łączącej przeguby. Kierunki prawie równoległe lub przecinające się prawie w jednym punkcie są także złe. Jeśli 3 więzy mają wspólny przegub, to obrót wokół tego przegubu może być duży. Jeśli 3 więzy mają tylko wspólny punkt przecięcia kierunków, a nie wspólny przegub, to wokół tego punktu może nastąpić mały obrót. Punkt taki nazywamy chwilowym środkiem obrotu. Układ, który może się obrócić o mały kąt lub nieznacznie przesunąć nazywamy chwilowo geometrycznie zmiennym. Układ, który może się znacznie obrócić lub przesunąć nazywamy geometrycznie zmiennym. Układy geometrycznie

zmiennie i chwilowo geometrycznie zmiennie zwykle nie nadają się na budowlę.

metoda 3=(1+1+1), w której trzy więzy przyczepione są do układu w trzech różnych punktach. Umieszczamy dwa pierwsze więzy dowolnie, ale nie na jednej linii, możliwie daleko od siebie. Trzeci więz kierujemy jak najdalej od punktu przecięcia się kierunków dwóch pierwszych więzów. Jeśli dwa pierwsze więzy są do siebie równoległe, to ich punkt przecięcia leży w nieskończoności, a kierunek trzeciego więzu winien być prostopadły do kierunku dwóch pierwszych więzów.

metoda 3=(2+1), w której dwa więzy przyczepione są do układu wspólnym przegubem. Trzeci więz przyczepiamy i kierujemy jak najdalej od tego przegubu.

### **Metody podparcia czterech stopni swobody - drzewa o dwóch ogniach lub pierścienia o czterech**

**ogniwach** ( $d_{ss}=1$ ,  $p_{css}=d_{ss}+3=4$ ):

Metoda 4=(3+1): podpieramy jedno ogniwo znaną już metodą 3 (którąś z jej dwóch podmetod).

Ogniwo to staje

się nieruchome. Ogniwo sąsiednie może się obracać względem ogniwa już podpartego. Obrót ten eliminujemy

więzem skierowanym jak najdalej od przegubu łączącego rozważane dwa ogniwa.

Metoda 4=(2+2): dwa sąsiednie ogniwa podpieramy parami więzów. Trzy punkty muszą stanowić trójkąt (nie

mogą leżeć na jednej prostej): przegub łączący dwa ogniwa, punkt przecięcia kierunków jednej pary więzów i

punkt przecięcia kierunków drugiej pary. Jeśli te punkty leżą (lub prawie leżą) na jednej prostej, układ jest

chwilowo geometrycznie zmienny - przegub łączący ogniwa może się trochę przesunąć prostopadle do

wspomnianej prostej. Metoda 2+2 daje bardziej symetryczny rozkład podpór niż metoda 3+1.

Wspomniany

trójkąt winien być jak największy i możliwie najbliższy trójkąta równobocznego.

### **Metody podparcia układu o pięciu i więcej stopniach swobody.**

Podpieramy w sposób omówiony powyżej podukład podstawowy o 3 lub 4(2+2) stopniach swobody. Pozostałe stopnie potraktujemy jako obroty (+1), eliminowane kolejno pojedynczymi więzami podporowymi. Najpierw eliminujemy obrót elementu połączonego przegubem bezpośrednio z układem podstawowym. Potem kolejnym więzem wykluczamy obrót elementu przyczepionego przegubowo do układu podpartego w kroku poprzednim, itd., rozbudowując unieruchomioną bryłę. W przypadku drzewa lub pierścienia o 5 stopniach swobody otrzymamy w ten sposób metody:  $(1+1+1)+1+1$ ,  $(2+1)+1+1$  oraz  $(2+2)+1$ , gdzie liczby w nawiasach odnoszą się do podukładu podstawowego, a jedyne poza nawiasem odnoszą się do więzów eliminujących obroty. Podpieranie tymi metodami polega na powiększaniu jednej unieruchomionej bryły, przez podpieranie elementów sąsiadujących z bryłą. Postępowanie takie jest skuteczne, proste i bezpieczne. Złożony układ o wielu stopniach swobody można podeprzeć wieloma innymi sposobami, różnymi od podanych, ale są one trudniejsze do analizy, zwłaszcza gdy kolejne więzy są dodawane do odległych od siebie elementów.

**Zasada trójkąta.** Elementarną sztywną, nieruchomą formą jest trójkąt: trzy przeguby, nie leżące na jednej linii, połączone w pierścień trzema sztywnymi elementami, z których jeden jest nieruchomy. Formę tę odnajdziemy w wielu konstrukcjach omówionych powyżej, choć czasem niektóre składniki trójkąta mogą nie być widoczne wprost. W przypadku drzewa z dwóch elementów (lub więzów) zamocowanych przegubowo do podłoża, trzecim elementem jest podłoże. Podłoże jest nieruchome z definicji, a całość jest nieruchoma dzięki formie trójkąta. Ogólnie, podłożem jest dowolna nieruchoma część konstrukcji. Zatem w miarę podpierania układu podłoże rozbudowuje się. Czasem rolę przegubu łączącego element z podłożem (i jednego z trzech przegubów w trójkącie) pełni chwilowy środek obrotu elementu. Chwilowy środek umożliwia tylko mały obrót, czym różni się od przegubu, umożliwiającego duże obroty.

Ponadto chwilowy środek obrotu może leżeć wszędzie: wewnątrz, na brzegu i na zewnątrz elementu. Chwilowy środek obrotu elementu podpartego dwoma więzami leży w punkcie przecięcia linii tych więzów. Chwilowy środek obrotu elementu ślizgającego się po dwóch nierównoległych ścianach (kierunek ruchu dwóch punktów elementu jest znany) leży na przecięciu prostych prostopadłych do tych ścian (i prostopadłych do kierunków ruchu dwóch punktów). Jeżeli element ma tylko jeden stopień swobody, odbierając go jednym więzem tworzymy trójkąt (element, więź i podłoże to trzy sztywne części trójkąta). Podpierając pierścień mający  $n$  elementów sposobami opisanymi powyżej też tworzymy ostatecznie trójkąt. Dwa elementy trójkąta nie mają więzów podporowych, a trzecim elementem jest podłoże, złożone z podpartego łańcucha pozostałych  $(n-2)$  elementów pierścienia. Aby powstał tu trójkąt, przeguby dwóch niepodpartych elementów nie mogą leżeć na linii prostej. Wymaga to odpowiedniego podziału pierścienia na podparte drzewo jednogałęziowe  $(n-2)$  elementów i pozostałe dwa elementy niepodparte.