

#### **Temat 4: Konstruowanie topologiczne płaskich kratownic statycznie wyznaczalnych**

##### **Typowe zadanie**

**Dane:** niesztynny szkielet prętowy, podparcie, typ i rozkład więzów, dylatacja. **Co zrobić:** zesztynnić szkielet minimalną liczbą więzów, tak aby był geometrycznie niezmienny, spełniając wymagania określone w danych. Ponumerować więzy w kolejności ich dodawania. Podać całkowitą liczbę dodanych więzów.

**Oznaczenia:** pręt - linia ciągła, lina- linia przerywana, sztywny tarcza - prostokąt zakreskowany; przeguby w szkielecie nie są rysowane (jest ich za dużo); podpora przegubowa nieprzesuwna- mały trójkąt; podpora przegubowa przesuwna - mały trójkąt podkreślony w kierunku przesuwu.

**Szkielet:** prostokątna siatka prętów połączonych w węzłach przegubowo, tworząca budowlę ograniczoną dowolnym brzegiem zewnętrznym i ewentualnie brzegami wewnętrznymi (wokół otworów). Szkielety elementarne to kwadrat i prostokąt. Szkielety złożone to zestawy szkieletów elementarnych. Szkielety złożone mogą być otwarte (bez otworów) i zamknięte (z otworami). Przykłady szkieletów złożonych: litery i cyfry ( o n v m c w I A E X 1 3 7 8 + T S L ) w różnych pozycjach (stojące, odwrócone, położone). Szkielety mogą być swobodne (niepodparte) i podparte (minimalnie - statycznie wyznaczalne lub z nadmiarem - statycznie niewyznaczalne). Szkielet swobodny nie jest sztywny: jego linie mogą się względem siebie przesuwać (w pionie i w poziomie) zniekształcając prostokąty w równoległoboki. Brak sztywności można usunąć za pomocą więzów wewnętrznych (zesztynnianie), zewnętrznych (podpieranie) lub jednych i drugich. W rozważanych zadaniach będziemy szkielety tylko zesztynniać. Podpory będą zadane.

**Więzy:** elementy eliminujące ruchy konstrukcji. Więzy będziemy umieszczać lokalnie, w elementarnych polach (oczkach) szkieletu. Więżami będą: pręt diagonalny, para lin diagonalnych oraz tarcza (ściana usztywniająca). Pręt lub tarcza w jednym polu (prostokącie) szkieletu otrzymuje indywidualny, pojedynczy numer. Para lin, których kierunki się krzyżują, otrzymuje ten sam numer (np. 5 i 5 jeśli jest to piąty z kolei więz). Liny z jednej pary czasami muszą wystąpić w jednym polu szkieletu (tworząc literę X), a niekiedy mogą pozostawać w dwóch różnych, nawet nie sąsiednich polach szkieletu. Pola te jednak muszą leżeć w jednym rzędzie szkieletu, a kierunki lin muszą się krzyżować.

**Podpory:** to więzy mocujące konstrukcję do otoczenia (ziemi, innej konstrukcji). Rozważania ograniczymy do podpór przegubowych: nieprzesuwnej i przesuwnej. Podpora nieprzesuwna (rysowana jako trójkąt) odbiera możliwość przesuwu w dowolnym kierunku jednemu punktowi (czyli odbiera dwa stopnie swobody), a pozostawia możliwość obrotu względem unieruchomionego punktu. Podpora przesuwna (trójkąt podkreślony) umożliwia przesunięcie w kierunku podkreślenia oraz obrót wokół podpory, a wyklucza przesunięcie w kierunku prostopadłym do podkreślenia (czyli odbiera jeden stopień swobody). Jak wiemy ciało sztywne na płaszczyźnie ma trzy stopnie swobody. Do podparcia takiego ciała wystarczają zatem dwie podpory przegubowe: jedna przesuwna i druga nieprzesuwna. Przesuw, który umożliwia podpora przesuwna winien być skierowany w kierunku podpory nieprzesuwnej (która taki - i wszelki inny - przesuw wyklucza). Konstrukcję tak podpartą nazwiemy konstrukcją zewnętrznie nieprzesztynnioną lub zewnętrznie statycznie wyznaczalną. Oprócz takich konstrukcji będziemy rozważać konstrukcje oparte na więcej niż dwóch podporach nieprzesuwnych, a więc zewnętrznie przesztynnione. Konstrukcje takie występują często w praktyce.

**Dylatacja:** umożliwia konstrukcji podążanie bez oporu za ruchami podpór, a więc bezawaryjne dopasowanie się do zmienionego (np. wskutek nierównomiernego osiadania) położenia podpór. Rozważania ograniczymy do ruchów pionowych i dylatacji pionowej. Dylatację pionową zapewnią nieusztynwiona kolumna w szkielecie - część szkieletu na lewo od tej kolumny jest zdylatowana od (i może się przesuwać w stosunku do) części na prawo. W kolumnie dylatacji wszystkie pola (prostokąty) są puste, bez więzów.

**Zesztynnianie szkieletów swobodnych:** Najprostszy szkielet o jednym prostokątnym oczku deformuje się do postaci równoległoboku. Do zesztynnienia wystarcza diagonalny pręt, para diagonalnych lin lub

tarcza zamurująca prostokąt. W szkielecie o dwóch oczkach najpierw zeszywniamy, jak poprzednio, jednym więzem jedno oczko. Drugie oczko nadal może odkształcić się w równoległobok, a więc wymaga jednego więzu. Ogólnie w otwartym (takim jak litery n, c, E) szkielecie jednowarstwowym każde oczko musi być usztywnione więzem. Numeracja więzów zaczyna się na jednym końcu i kończy na drugim. W zamkniętym szkielecie (pierścieniu, jak np. litera O) jednowarstwowym trzy oczka nie wymagają więzów. Oczka te można rozmieścić na trzy praktyczne sposoby: wspornikowy, belkowy i trójkątny. W wariacie wspornikowym oczka te mogą być usytuowane obok siebie w dowolnym narożniku w kształcie litery L. Oznacza to podejście do narożnika dwóch sztywnych ramion – wsporników (o oczkach z więzami). Sam narożnik zostaje zapełniony przez czterokrotne dodanie pary prostopadłych prętów, a więc czterokrotną rozbudowę sztywnego trójkąta. W wariacie belkowym zakładamy, że jedna krawędź otworu, np. pozioma górna, jest prosta. Nasza belka obejmuje tę krawędź z wyjątkiem jednego oczka na każdym końcu. Trzecie niesztywne oczko przylega pionowo do jednego z dwóch poprzednich oczek. Sztywnej belce trzeba odebrać trzy stopnie swobody. Dwa z nich są odebrane na końcu z jednym niesztwnym oczkiem, a jeden na końcu z dwoma oczkami. W wariacie trójkątnym trzy niesztywne oczka umieszczamy w trzech narożnikach nie leżących na jednej linii, co rozbija pierścień na trzy sztywne części połączone przegubowo w punktach tworzących trójkąt (jak wiemy trójkąt jest sztywny). W otwartym szkielecie wielowarstwowym usztywnianie zaczynamy od dowolnego oczka. Następnie usztywniamy dowolne oczko sąsiednie, mające wspólny bok z oczkiem już usztywnionym (nie może to być wspólny narożnik, gdyż dwa sztywne prostokąty połączone ze sobą przegubowo w narożniku nie tworzą sztywnej całości). Z kolei usztywniamy dowolne oczko przylegające bokiem, nie narożnikiem, do dwóch oczek już usztywnionych. Następnie usztywniamy oczko przylegające z zewnątrz do najmniejszego prostokąta, we wnętrzu którego znajdują się wszystkie elementy usztywnione dotychczas. I to jest metoda ogólna dla szkieletów bez otworów: usztywniane w następnym kroku oczko przylega od zewnątrz bokiem, nie narożnikiem, do minimalnego prostokąta zawierającego oczka usztywnione poprzednio. Prostokąt ten jest już sztywny. W metodzie tej mamy więc do czynienia z rosnącym sztywnym prostokątem. Bok prostokąta, w sąsiedztwie którego dodano więz, przesuwa się o jeden rząd, a bok prostopadły wydłuża o jedno oczko. Przesunięcie dowolnego boku wymaga dodania tylko jednego więzu wzdłuż tego boku (pręta, tarczy lub pary skrzyżowanych lin), gdyż cały rząd oczek wzdłuż boku ma jeden wspólny stopień swobody - przemieszczenie podłużne. Liny z jednej pary mogą, ale nie muszą się znajdować w tym samym oczku. Każdą z nich możemy umieścić w dowolnym oczku przylegającym do aktualnie przesuwanego boku rosnącego sztywnego prostokąta, z zachowaniem skrzyżowania kierunków lin (kierunki pary lin nie mogą być równoległe, gdyż przesunięcie przeciwne do kierunku pochylenia lin byłoby możliwe). W przypadku szkieletu wielowarstwowego z otworem (pierścienia) najprościej jest zacząć od usztywnienia w znany sposób (wspornikowy, belkowy lub trójkątny) jednowarstwowego pierścienia na krawędzi otworu. Najmniejszy prostokąt, we wnętrzu którego znajduje się ów jednowarstwowo pierścień, też staje się w tym momencie sztywny, zgodnie z metodą sztywnego prostokąta. W kolejnych krokach powiększamy uzyskany sztywny prostokąt.

**Szkielety podparte minimalnie (na dwóch podporach przegubowych - nieprzesuwnej i przesuwnej):** wymagają zeszywnia takiego samego jak szkielety swobodne (bez podpór).

Wspomniane dwie podpory odbierają trzy stopnie swobody, a tyle ma sztywne ciało na płaszczyźnie. Podpory te nie mogą więc odebrać deformacyjnych stopni swobody. Tak podparte szkielety muszą więc być sztywne wewnątrz. W szczególności szkielety tak podparte nie mogą być zdylatowane pionowo.

**Szkielety na trzech i więcej podporach nieprzesuwnych:** będziemy podierać wykorzystując fakt, że wszystkie lub niektóre linie szkieletu są unieruchomione w kierunku pionowym (i poziomym) przez podpory. Jeśli podparte są wszystkie linie pionowe, to pozostają tylko ruchy poziome nie podpartych linii poziomych, które eliminujemy kolejno, jednym więzem (pręt, tarczą lub parą lin) na jedną linię poziomą, poczynając od linii najbliższej podpór. Jeśli wymagana jest dylatacja, to w całej kolumnie szkieletu stanowiącej dylatację nie dajemy więzów. Jeśli podpory występują w dwóch grupach (na tym samym lub różnych poziomach), to zakładamy że między grupami podpór znajduje się wnęka o poziomej krawędzi. Wnękę można potraktować jako fragment otworu, którego dół i boki są już sztywne, a góra może być zeszywniona metodą wspornikową lub belkową - stosowaną do otworów. Jeśli na lewym (lub prawym) końcu wnęki ma być dylatacja pionowa, to wybieramy metodą wspornikową, z niesztwnym końcem wspornika w miejscu dylatacji. Po zeszywnieniu wnęki, posuwamy się w górę zgodnie z metodą rosnącego sztywnego prostokąta.