

Temat 2: Belki statycznie wyznaczalne z obciążeniem stałym

Typowe zadanie

Dane: nieprzesztywniona belka wielopodporowa (topologia oraz przęsła długie i krótkie) * obciążenie Szukane: rozkład schodkowy belki * wykresy momentów zginających (M) od obciążeń równomiernych na poszczególnych przęsłach (na jednym rysunku) * wykres momentów zginających i reakcji od obciążenia równomiernego na całej belce * Dwie konstrukcje dla obciążenia na całej belce: (1) żelbetowa, lekka o zmiennej wysokości i (2) stalowa, kratowa o stałej wysokości, z rozciąganymi krzyżulcami

Podpory: to więzy mocujące konstrukcję do otoczenia (ziemi, innej konstrukcji). Rozważania ograniczymy do podpór przegubowych: nieprzesuwnej i przesuwnej oraz podpory sztywnej (utwierdzenia). Podpora nieprzesuwna (rysowana jako trójkąt) odbiera możliwość przesuwu w dowolnym kierunku jednemu punktowi (czyli odbiera dwa stopnie swobody), a pozostawia możliwość obrotu względem unieruchomionego punktu. Podpora przesuwna (trójkąt podkreślony) umożliwi przesunięcie w kierunku podkreślenia oraz obrót wokół podpory, a wyklucza przesunięcie w kierunku prostopadłym do podkreślenia (czyli odbiera jeden stopień swobody). Podpora sztywna (oznaczenie: linia prostopadła do belki plus kreskowanie ukośne do tej linii) odbiera belce wszystkie ruchy, a więc trzy stopnie swobody (dwa przesunięcia i obrót). Dwie blisko siebie położone podpory przegubowe można zastąpić jedną podporą sztywną.

Jak wiemy ciało sztywne na płaszczyźnie ma trzy stopnie swobody. Do podparcia takiego ciała wystarczają zatem dwie podpory przegubowe: jedna przesuwna i druga nieprzesuwna. Przesuw, który umożliwia podpora przesuwna winien być skierowany w kierunku podpory nieprzesuwnej (która taki - i wszelki inny - przesuw wyklucza). Konstrukcję tak podpartą nazwiemy konstrukcją zewnętrznio nieprzesztywnioną lub zewnętrznio statycznie wyznaczalną. Do nieprzesztywnionego podparcia ciała sztywnego wystarczy też jedna podpora sztywna (utwierdzenie)

Belka wielopodporowa nieprzesztywniona: jednogłęziowe drzewo złożone z prostych, poziomych prętów, połączonych ze sobą końcami przegubowo i opartych na podporach przegubowych i/lub sztywnych (utwierdzonych). Pręt to ciało długie i cienkie (oznaczenie: linia ciągła). Podpora przegubowa może być nieprzesuwna (oznaczenie: trójkąt) lub przesuwna (oznaczenie: trójkąt podkreślony w kierunku przesuwu). Obie podpory przegubowe przytrzymują belkę w jednym punkcie, umożliwiając obrót belki względem podpory. Podpora przesuwna umożliwia też przesuw belki względem podpory. Podpora ta uniemożliwia przemieszczenie prostopadłe do przesuwu, a więc odbiera belce jeden stopień swobody. Podpora nieprzesuwna wyklucza wszelkie przesunięcia, a więc odbiera dwa stopnie swobody. Podpora sztywna (oznaczenie: linia prostopadła do belki plus kreskowanie ukośne do tej linii) odbiera belce wszystkie ruchy, a więc trzy stopnie swobody (dwa przesunięcia i obrót). Dwie blisko siebie położone podpory przegubowe można zastąpić jedną podporą sztywną. Belka nieprzesztywniona (zwyczajowo nazywana statycznie wyznaczalną) ma minimalną liczbę podpór, wystarczającą do jej unieruchomienia. Dla jednego pręta, który ma w płaszczyźnie trzy stopnie swobody, potrzebne są dwie podpory przegubowe - przesuwna i nieprzesuwna. Dla prostego łańcucha z dwóch prętów - trzy podpory przegubowe, w tym jedna nieprzesuwna. Dla łańcucha z trzech prętów - cztery podpory przegubowe, w tym jedna nieprzesuwna. Dla łańcucha z "n" prętów potrzeba i wystarcza "n+1" podpór przegubowych, w tym jedna nieprzesuwna. Standardowe, najprostsze, nieprzesztywnione belki wielopodporowe mają podparte przegubowo oba końce i wszystkie przeguby łączące pręty. Wszystkie inne belki, o tej samej liczbie podpór co dana belka standardowa, można otrzymać przemieszczając lub nie, w dowolnych kombinacjach, podpory belki standardowej. Podporę skrajną lewą można zostawić lub przesunąć w prawo. Podporę skrajną prawą można zostawić lub przesunąć w lewo. Każdą podporę wewnętrzną (stojącą w belce standardowej pod przegubem) można zostawić, przesunąć w lewo, lub przesunąć w prawo. Podpory można przesuwać nie za daleko, tylko do najbliższego odcinka belki. Metodą przesuwania można otrzymać $4 \cdot 3^{n-2}$ różnych belek na "n" podporach przegubowych. W belkach tych pojawiają się trzy typy części: pręty oparte na dwóch podporach, a więc nieruchome (stojaki), pręty oparte na jednej podporze, a więc mogące się wokół tej podpory obracać (huśtawki) oraz pręty bez podpór, które są całkowicie ruchome (łączniki). Każdy stojak jest samowystarczalny - nieruchomy. Każda huśtawka musi się trzymać (ale tylko jednym końcem) - wprost, lub za pośrednictwem łańcucha huśtawek - dokładnie jednego stojaka. Każdy łącznik musi się opierać na obu końcach - wprost, lub za pośrednictwem łańcucha huśtawek - na stojakach. Każde dwa stojaki muszą być rozdzielone dokładnie jednym łącznikiem - wprost, lub za pośrednictwem łańcuchów huśtawek. Wymienione belki mają tylko podpory przegubowe. Dodatkowe belki otrzymamy zastępując stojaki, których dwie podpory przegubowe są blisko siebie, podporami sztywnymi. Zastąpić możemy dowolnie wybraną liczbę takich stojaków.

Topologia: powiązania prętów, przegubów i podpór.

Geometria belki: w tym temacie będziemy zakładać, że co drugie przęsło belki jest wyraźnie dłuższe. Umożliwia to narysowanie jednoznacznego wykresu momentów zginających dla obciążenia na całej belce. Przęsłem jest odcinek między dwiema sąsiednimi podporami i odcinek między swobodnym końcem belki a najbliższą podporą.

Obciążenia: reprezentują to wszystko (siły zewnętrzne), co wywołuje deformacje (zmiany formy) konstrukcji. Rozpatrzmy tylko najczęściej w praktyce spotykane typy obciążeń. Dla belki poziomej są to obciążenia skierowane pionowo, poprzecznie do belki i zwrócone do dołu - wywołane grawitacją. Obciążenia takie mogą być: skupione (oznaczenie: strzałka skierowana do dołu) lub rozłożone równomiernie (oznaczenie: wąski poziomy prostokąt wypełniony małymi strzałkami skierowanymi do dołu). Obciążenie skupione reprezentuje ciężary o małych wymiarach wobec wymiarów belki (np. człowiek na kładce lub samochód na moście). Obciążenie rozłożone równomiernie działa na całej długości belki lub jej długim fragmencie (np. ciężar własny belki, ciężar warstwy śniegu).

W tym temacie uwzględnimy tylko najbardziej interesujący praktycznie przypadek równomiernego obciążenia całej belki. Jednak w pierwszej kolejności będziemy obciążać po kolei pojedyncze przęsła, co umożliwi elementarną analizę pracy belki.

Schodkowy schemat belki: wynika wprost z topologii. Ujawnia on rolę poszczególnych części belki i ich współdziałanie w przenoszeniu obciążenia i rozchodzeniu się zginania po belce. Schemat topologiczny może zawierać trzy rodzaje prętów (pręt rozciąga się między przegubami), w zależności od liczby podpór przegubowych połączonych z danym prętem. Pręt z dwiema podporami (lub jedną podporą sztywną) nazwiemy stojakiem, pręt z jedną podporą nazwiemy huśtawką, a pręt bez podpór nazwiemy łącznikiem. Po usunięciu prętów - sąsiadów danego pręta widać, że stojak jest nieruchomy, huśtawka może się obracać wokół podpory (ma jeden stopień swobody), a łącznik ma oba końce ruchome (dwa stopnie swobody). Zatem stojak nie opiera się na swoich sąsiadach (którymi zawsze są huśtawki i/lub łączniki), ale sąsiedzi opierają się na nim. Huśtawka opiera się jednym końcem (tak by utracić posiadany jeden stopień swobody) na stojaku lub innej huśtawce. Na końcu ciągu huśtawek jest zawsze stojak. Ciąg taki działa na zasadzie "podaj dalej", przy czym huśtawki położone bliżej stojaka podpierają huśtawki położonej dalej. Łącznik opiera się dwoma końcami (by utracić dwa posiadane stopnie swobody) na swoich sąsiadach, którymi mogą być stojaki i/lub huśtawki. Z powyższego wynika, że w każdym niepodpartym przegubie schematu topologicznego albo pręt lewy opiera się na prawym, albo prawy na lewym. W schemacie schodkowym oddajemy to rysując pręt podparty powyżej pręta go podpierającego i umieszczając między nimi dodatkową podporę przegubową. Podporę taką nazwiemy wewnętrzną, gdyż łączy ona pręty belki ze sobą, w odróżnieniu od podpór danych na schemacie topologicznym, które łączą belkę z jej otoczeniem, są więc podporami zewnętrznymi. Podpory wewnętrzne tworzą stopnie w miejscach niepodpartych przegubów. Drugi rodzaj stopni powstaje na zewnętrznych podporach przegubowych, w których belka jest ciąglą (nie ma przegubu). W miejscach tych albo część na lewo od podpory trzyma się części na prawo, albo prawa trzyma się lewej. Część trzymająca ma dwie podpory. W przypadku stojaka są to podpory zewnętrzne, a w przypadku huśtawki jedna podpora jest zewnętrzna a druga wewnętrzna. Część trzymająca nie ma żadnych podpór. Na schemacie schodkowym rysujemy ją powyżej części trzymającej, łącząc obie części linią pionową. W całości schemat schodkowy tworzy górzysty, tarasowy krajobraz: stojaki i dylatacje (tj. wewnętrzne podpory sztywne i przegubowe z przegubem nad podporą) tworzą doliny, łączniki tworzą szczyty, a huśtawki tworzą zbocza. Półki tarasów są dwóch typów: kładki i konary. Kładki opierają się na końcach na dwóch podporach przegubowych (zewnętrznych, wewnętrznych lub mieszanych), a konary wystają wspornikowo z kładek lub z podpór utwierdzonych. Kładka i wspornikowy konar to najprostsze topologicznie nieprzesztywnione belki jakie można utworzyć z jednego pręta. Zgodnie ze schematem schodkowym, z kładek i konarów zbudowane są wszystkie, dowolnie złożone belki o wielu prętach, przegubach i podporach.

Wykresy momentów zginających (M): podają dla ustalonego, nieruchomego obciążenia wartości momentu zginającego na całej długości belki, we wszystkich punktach. Wykres M wystąpi na tych zboczach schematu schodkowego, które są obciążone i/lub mają obciążony wierzchołek. Na danym zboczach wykres M rozciąga się - i od tego miejsca zaczynamy go rysować - od początku najwyższej położonego, obciążonego przęsła do końca doliny. Wykres tworzy ciąglą (bez skoków) linię łamaną, z kantami na podporach zewnętrznych (czyli na końcach przęsła), prostą w przęsłach nie obciążonych i krzywą (drugiego stopnia, wypukłą do dołu) w przęsłach obciążonych, z zerami w przegubach. Wykres rysujemy po rozciąganej stronie belki. Jeśli zaczyna się on na kładce, to jest symetryczną krzywą, położoną u dołu kładki z zerami na końcach. Jeśli zaczyna się na konarze, to leży na górze konara, a jego krzywa rośnie od zera na swobodnym końcu, będąc tam styczną do belki, do wartości maksymalnej na drugim końcu. Jeśli wykres zaczyna się na przęsle złożonym z kładki opartej na

konarze, to krzywa wykresu znajduje się na dole kładki i na górze konara. Podobnie jest w przypadku przęsła złożonego z kładki opartej na dwóch konarach: krzywa wykresu jest poniżej kładki i powyżej konarów. Położenie wykresu (górze lub dół belki) w przęsłach znajdujących się poniżej najwyższego obciążonego przęsła na schemacie schodkowym wynika z ciągłości wykresu: konieczności przechodzenia przez zero w przegubach oraz możliwości załamania się na przegubowych podporach zewnętrznych. Wykresy na częściach oddzielonych od siebie dylatacjami są od siebie niezależne, ale umieszczamy je na jednym rysunku. Elementarne wykresy momentów otrzymujemy obciążając na całej długości pojedyncze przęsła. Wykresy te można jednoznacznie (co do formy, nie wartości liczbowych) skonstruować na podstawie samej topologii belki, bez znajomości długości poszczególnych części belki. Wykresy momentów dla obciążeń złożonych, rozciągniętych na więcej niż jedno przęsło, są sumą wykresów elementarnych od obciążeń w poszczególnych przęsłach. Kształt wykresu sumarycznego jest jednoznaczny w danym przęsle, gdy wykresy składowe leżą po tej samej stronie belki. Dzieje się tak w przypadku obciążeń położonych na co drugim przęsle. Wykresy momentów wywołane obciążeniami przęseł sąsiadnych leżą w niektórych przęsłach po przeciwnych stronach, jeden na górze a drugi na dole. Wykresy te rywalizują ze sobą, odejmują się od siebie, co utrudnia określenie położenia wykresu sumarycznego. Trudności tej unikamy zakładając, że co drugie przęsło jest dużo dłuższe od swoich sąsiadów. Sumaryczny wykres momentów leży wtedy po tej stronie, po której leżą wykresy elementarne pochodzące od obciążeń przęseł długich. Dzieje się tak, gdyż w przypadku obciążenia ciągłego wartość momentu rośnie jak kwadrat długości przęsła, a więc np. dwukrotne wydłużenie przęsła powoduje czterokrotny wzrost momentu.

Reakcje podpór (R): można odczytać z wykresu momentów (M) nad podporami. Zwykle wykres M na podporze ma kant. Reakcja podpory, działająca na belkę, jest skierowana w stronę ostrza kantu i jest tym większa, im kant jest ostrzejszy. Brak kantu oznacza brak reakcji. Nas w obecnym temacie interesuje zwrot reakcji, a nie jej wielkość. Reakcja skierowana do dołu oznacza odrywanie do góry belki od podpory. Sygnalizuje to konieczność takiego związania belki z podporą, by odrywanie nie wystąpiło.

Konstrukcje: wynikają bezpośrednio z wykresu momentów dla danego obciążenia. Możliwe są rozliczne konstrukcje z rozmaitych materiałów. Rozważymy dwa rodzaje konstrukcji. Konstrukcja pełnościenna, lekka żelbetowa ma płaską górę (tak się umawiamy, równie dobrze może być płaski dół) i rzeźbiony dół, tak by grubość belki zmieniała się jak grubość wykresu momentów zginających. W miejscach zerowych wykresu momentu nie będących przegubami, grubość belki jest mała, ale niezerowa, po to by zapewnić belce niezmienną geometryczną i przenieść siły poprzeczne (ścinające). Belkę betonową zbroimy na zginanie prętami stalowymi wzdłuż krawędzi rozciąganej, leżącej po tej samej stronie co wykres momentów. W poprzek zbrojenia rysujemy krótkie, faliste rysy w betonie. Na podporach odrywanych od belki rysujemy poprzeczną kotew w kształcie dwuteownika. Druga konstrukcja to krata stalowa o stałej grubości, rozciąganych krzyżulcach, ściskanych słupkach i ściskanych bądź rozciąganych pasach dolnym i górnym. Pasy to poziome elementy belki. Słupki są prostopadłe do pasów i rozmieszczone w odległościach równych odległości pasów, tworząc kwadratowe pola. Krzyżulce tworzą przekątne kwadratów. Przekątne te mogą być pochylone w lewo lub w prawo. Krzyżulce stalowe są cienkie i wiotkie, podatne na wyboczenie przy ściskaniu, a więc lepsze jest pochyczenie prowadzące do rozciągania krzyżulców. Krzyżulce pochylone tak jak wykres momentów są rozciągane. Na rysunku kraty elementy rozciągane oznaczamy linią pojedynczą (jako cienkie), a ściskane podwójną (jako grubsze ze względu na zagrożenie wyboczeniem). Krzyżulce dobraliśmy tak, by były rozciągane (linia pojedyncza). Z równowagi sił pionowych w węzłach wynika, że słupki muszą być ściskane (np. węzeł na pasie górnym jest ciągnięty do dołu przez krzyżulec, a więc musi on być pchany do góry przez ściskany słupek). Pasy leżące po stronie wykresu momentów są rozciągane (linia pojedyncza), a po stronie przeciwnej ściskane (linia podwójna). Obciążenie kraty przykładamy do jej węzłów, a nie między nimi, by uniknąć zginania pasów.